解析：如图 13，因为 $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{FA}$，所以 $A$ 为 $FB$ 的中点，又 $FB\perp OA$，所以 $\angle FOA=\angle BOA$，由对称性知，$\angle FOA=\angle BOx$，故 $\angle FOA=\angle BOx=\angle BOA=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，从而 $e^2=1+(\frac{b}{a})^2=4\Rightarrow e=2$. 故选 C.

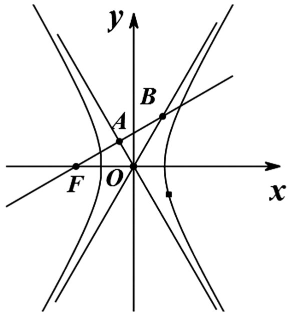

图 13

点评：本题充分利用图形的特性——垂直平分与对称性，直接得出，将问题简化.

例 14.（2017 年河南省八市重点质检二（理））已知 $P$ 为抛物线 $y^2=4x$ 上一个动点，$Q$ 为圆 $x^2=(y-4)^2=1$ 上一个动点，当点 $P$ 到点 $Q$ 的距离与点 $P$ 到抛物线的准线的距离之和最小时，点 $P$ 的横坐标为(　　)

A. $\frac{9-\sqrt{17}}{8}$　　B. $\frac{9}{8}$　　C. $\frac{\sqrt{17}}{8}$　　D. $\sqrt{17}$

解析：如图 14，求 $|PM|+|PQ|$ 的最小值，转化为求 $|PF|+|PQ|$ 的最小值，又圆外一点到圆上的最小距离可以转化为该点到圆心的距离减去半径，则原问题可以转化为求 $|PF|+|PC|-1$ 的最小值，故 $F$，$P$，$C$ 三点共线时最小，如图 2，这时直线 $CF$:$y=4-4x$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=4-4x,\end{cases}$ 消去 $y$，解得 $x=\frac{9-\sqrt{17}}{8}$.当故选 A.

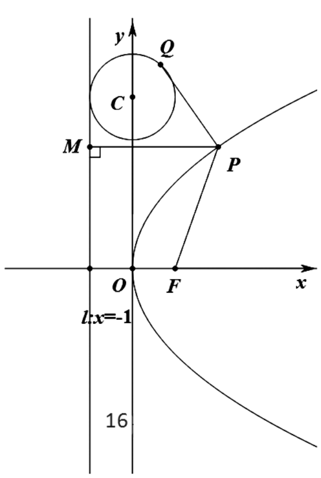

图 14

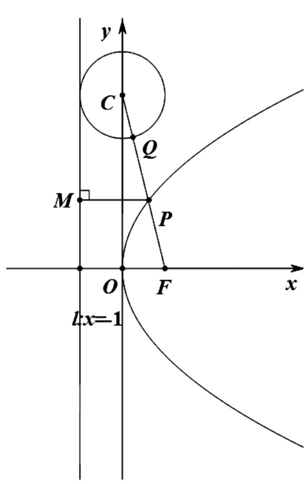

图 15

点评：本题综合考查抛物线的定义，圆外一点到圆上的最近距离，两点之间线段最短，其中体现数与形相互转化的思想.

例 15. 设抛物线 $C$:$x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F$，准线为 $l$，$A\in C$，已知以 $F$ 为圆心，$FA$ 为半径的圆 $F$ 交 $l$ 于 $B,D$ 两点.

（Ⅰ）若 $\angle BFD=90°$，$\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$；求 $p$ 的值及圆 $F$ 的方程；

（Ⅱ）若 $A,B,F$ 三点在同一直线 $m$ 上，直线 $n$ 与 $m$ 平行，且 $n$ 与 $C$ 只有一个公共点，求坐标原点到 $m$，$n$ 距离的比值.

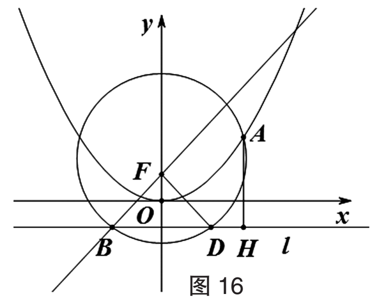

图 16

解析：（Ⅰ）如图 3，由对称性知：$\triangle BFD$ 是等腰直角三角形，斜边 $|BD|=2p$，点 $A$ 到准线 $l$ 的距离 $d=|FA|=|FB|=\sqrt{2}p$，$S_{\triangle ABD}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times|BD|\times d=4\sqrt{2}\Leftrightarrow p=2$，圆 $F$ 的方程为 $x^2+(y-1)^2=8$.

（Ⅱ）如图 4，由对称性，设 $A(x_0,\frac{x_0^2}{2p})(x_0>0)$，则 $F(0,\frac{p}{2})$，点 $A,B$ 关于点 $F$ 对称得 $B(-x_0,p-\frac{x_0^2}{2p})$，则 $p-\frac{x_0^2}{2p}=-\frac{p}{2}$，化简得 $x_0^2=3p^2$，所以 $A(\sqrt{3}p,\frac{3p}{2})$，直线 $m$:$y=\frac{\frac{3p}{2}-\frac{p}{2}}{\sqrt{3}p}x+\frac{p}{2}$，即 $x-\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{3}p}{2}=0$，由 $x^2=2py$ 得 $y=\frac{x^2}{2p}$，求导 $y'=\frac{x}{p}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}p$，所以切点 $P(\frac{\sqrt{3}p}{2},\frac{p}{6})$，故直线 $n$:$y-\frac{p}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{\sqrt{3}p}{3})$，化简得 $x-\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{6}p=0$，由相似三角形，得坐标原点到 $m,n$ 距离的比值为对应 $y$ 轴截距的绝对值之比，即为 $\frac{\sqrt{3}p}{2}:\frac{\sqrt{3}p}{6}=3$.

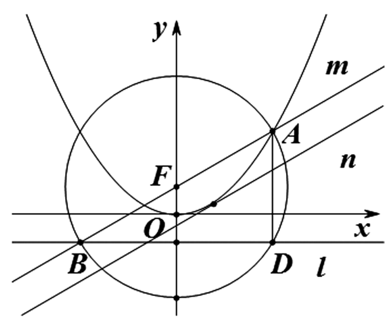

图 17

点评：本题解法，是把数形结合方法解解析几何用到极致的典范.

## 七、利用数形结合的思想解决球的问题

球的表面积或体积问题，本质是半径问题，往往转化为长方体或正方体问题.

例 16. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为(　　)

A. $3\pi$　　B. $4\pi$　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. $6\pi$

解析：如图，把棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $S-ABC$ 的外接球